

Exercices d'application — Niveau intermédiaire

Séquence n°1 — Manipuler les réels

Version corrigée

Les exercices sont regroupés par objectif. Chaque objectif propose 2 à 4 exercices.

Objectif 1 — Identifier l'ensemble le plus petit auquel appartient un réel

Exercice 1. Pour chacun des nombres, donner l'ensemble le plus petit parmi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$:

$$a = \frac{120}{15}, \quad b = -\frac{7}{4}, \quad c = \frac{2}{9}, \quad d = \sqrt{25}, \quad e = \sqrt{7}.$$

Correction.

— $a = 8 \in \mathbb{N}$; $b = -1,75 \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$; $c = 0,2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$; $d = 5 \in \mathbb{N}$; $e = \sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (7 n'étant pas un carré parfait, par un raisonnement analogue à $\sqrt{2}$).

Exercice 2. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

- a) $\frac{16}{4} \in \mathbb{Z}$. b) $\pi \in \mathbb{Q}$. c) $\sqrt{36} \in \mathbb{N}$. d) $1,25 \in \mathbb{D}$. e) Tout décimal est rationnel.

Correction. a) Vrai ($4 \in \mathbb{Z}$). b) Faux (π irrationnel). c) Vrai ($\sqrt{36} = 6$). d) Vrai ($1,25 = \frac{125}{100} = \frac{125}{10^2}$). e) Vrai (un décimal $\frac{a}{10^n}$ est aussi $\frac{a}{q}$ avec $q = 10^n \in \mathbb{Z}^*$).

Exercice 3 (QCM). Une seule réponse exacte par question.

- $x = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ appartient à : (A) $\mathbb{N}$ (B) $\mathbb{D} \setminus \mathbb{N}$ (C) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (D) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$.
- $y = 0,123\,123\,123 \dots$ (période 123) appartient à : (A) $\mathbb{D}$ (B) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$ (C) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (D) $\mathbb{N}$.
- $z = \sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18}$ vaut : (A) 0 (B) $\sqrt{2}$ (C) $-\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$.
- Le plus petit ensemble contenant $\frac{-3}{6}$ est : (A) $\mathbb{Z}$ (B) $\mathbb{D}$ (C) $\mathbb{Q}$ (D) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Réponses. 1. (A) car $\sqrt{48/3} = \sqrt{16} = 4$. 2. (B) périodique non finie. 3. (A) car $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0$. 4. (B) car $\frac{-3}{6} = -0,5 \in \mathbb{D}$.

Exercice 4 (mise sous forme rationnelle). Mettre sous forme $\frac{p}{q}$ irréductible :

$$x = 0,\overline{72} = 0,727272\dots, \quad y = 1,3\overline{6} = 1,3666\dots$$

Correction.

Pour x . $100x = 72,\overline{72}$ et $x = 0,\overline{72}$. Donc $100x - x = 72$, soit $99x = 72$ d'où $x = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$.

Pour y . $10y = 13,\overline{6}$ et $100y = 136,\overline{6}$. Donc $100y - 10y = 123$, soit $90y = 123$ d'où $y = \frac{123}{90} = \frac{41}{30}$.

Objectifs 2 et 3 — Intervalles, valeur absolue, distance

Exercice 5. Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des réels x vérifiant :

- a) $-2 < x \leq 3$; b) $x \geq -5$; c) $x < \frac{1}{2}$; d) $0 \leq x < 7$.
a) $] -2; 3]$ b) $[-5; +\infty[$ c) $] -\infty; \frac{1}{2}[$ d) $[0; 7[$.

Exercice 6 (intersections et réunions). Déterminer, sous forme d'intervalle(s) :

- a) $[-1; 5] \cap [2; 8]$; b) $[-1; 5] \cup [2; 8]$; c) $] -\infty; 3[\cap] 0; +\infty[$; d) $[1; 4] \cap [6; 9]$.
a) $[2; 5]$. b) $[-1; 8]$. c) $] 0; 3[$. d) $\emptyset$.

Exercice 7 (calculs de valeur absolue). Calculer :

a) $|-7|$; b) $|3 - 8|$; c) $|\sqrt{2} - 2|$; d) $|\pi - 4|$.

a) 7. b) $|-5| = 5$. c) $\sqrt{2} < 2$ donc $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$. d) $\pi < 4$ donc $|\pi - 4| = 4 - \pi$.

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle :

a) $|x - 5| \leq 3$; b) $|x + 2| < 4$; c) $|2x - 1| \geq 5$.

a) $2 \leq x \leq 8 \Rightarrow [2; 8]$. b) $-6 < x < 2 \Rightarrow] - 6; 2[$. c) $2x - 1 \leq -5$ ou $2x - 1 \geq 5$, soit $x \leq -2$ ou $x \geq 3$: $] - \infty; -2] \cup [3; +\infty[$.

Exercice 9 (lecture graphique). On donne la droite réelle ci-dessous avec un intervalle I représenté par un trait épais.



a) Donner I sous forme d'intervalle.

b) Caractériser I par une condition $|x - a| \leq r$.

a) $I = [-2; 8]$. b) Centre $a = \frac{-2+8}{2} = 3$, rayon $r = \frac{8-(-2)}{2} = 5$. Donc $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \leq 5\}$.

Objectif 4 — Puissances et racines

Exercice 10. Simplifier sans calculatrice :

a) $A = 2^5 \times 2^{-3}$; b) $B = \frac{3^7}{3^4}$; c) $C = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; d) $D = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times 5^2$.

a) $2^2 = 4$. b) $3^3 = 27$. c) $2^3 = 8$. d) $\frac{4}{25} \times 25 = 4$.

Exercice 11. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible :

a) $\sqrt{75}$; b) $\sqrt{147}$; c) $\sqrt{288}$; d) $3\sqrt{20} + \sqrt{45}$.

a) $5\sqrt{3}$. b) $7\sqrt{3}$. c) $12\sqrt{2}$. d) $3 \times 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$.

Exercice 12. Rendre rationnel le dénominateur de :

$$E = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad F = \frac{2}{3 - \sqrt{2}}, \quad G = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}.$$

$$E = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad F = \frac{2(3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = \frac{2(3 + \sqrt{2})}{7} = \frac{6 + 2\sqrt{2}}{7}, \quad G = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{3 - 1} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

Objectif 5 — Identités remarquables

Exercice 13 (développement). Développer et réduire :

a) $(x + 5)^2$; b) $(3x - 2)^2$; c) $(2x - 7)(2x + 7)$; d) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$.

a) $x^2 + 10x + 25$. b) $9x^2 - 12x + 4$. c) $4x^2 - 49$. d) $x^2 - 3$.

Exercice 14 (factorisation). Factoriser :

a) $x^2 - 25$; b) $4x^2 - 9$; c) $x^2 + 6x + 9$; d) $25x^2 - 30x + 9$.

a) $(x - 5)(x + 5)$. b) $(2x - 3)(2x + 3)$. c) $(x + 3)^2$. d) $(5x - 3)^2$.

Exercice 15 (factorisation et équation). Factoriser puis résoudre :

a) $x^2 - 49 = 0$; b) $(x + 1)^2 - 9 = 0$; c) $(2x - 5)^2 - (x + 3)^2 = 0$.

a) $(x - 7)(x + 7) = 0 \Rightarrow x = 7$ ou $x = -7$.

b) $(x + 1 - 3)(x + 1 + 3) = (x - 2)(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -4$.

c) $[(2x - 5) - (x + 3)][(2x - 5) + (x + 3)] = (x - 8)(3x - 2) = 0 \Rightarrow x = 8$ ou $x = \frac{2}{3}$.

Objectif 7 — Encadrement et notation scientifique

Exercice 16 (encadrement). On sait que $1 < x < 4$ et $-2 < y < 3$. Encadrer :

a) $A = x + y$; b) $B = 3x - 2y$; c) $C = xy$ (attention au signe).

a) $1 - 2 < x + y < 4 + 3$, soit $-1 < A < 7$.

b) $3 < 3x < 12$; $-6 < 2y < 6$ donc $-6 < -2y < 6$; somme : $-3 < B < 18$.

c) Les quatre produits aux bornes : $1 \cdot (-2) = -2$, $1 \cdot 3 = 3$, $4 \cdot (-2) = -8$, $4 \cdot 3 = 12$. Donc $-8 < C < 12$ (bornes strictes car les inégalités initiales le sont).

Exercice 17 (notation scientifique). Donner la notation scientifique de :

a) $A = 47\,300\,000$; b) $B = 0,000\,062\,5$; c) $C = \frac{3,2 \times 10^7}{8 \times 10^{-3}}$.

a) $4,73 \times 10^7$. b) $6,25 \times 10^{-5}$. c) $\frac{3,2}{8} \times 10^{7-(-3)} = 0,4 \times 10^{10} = 4 \times 10^9$.