

Séquence 1 : Manipuler les réels

Seconde — Mathématiques

Version ÉLÈVE — à compléter en classe

Objectifs de la séquence

- Identifier l'ensemble le plus petit auquel appartient un réel ; maîtriser les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Traduire une condition sur un réel par un **intervalle** (ou une réunion d'intervalles).
- Manipuler la **valeur absolue** comme distance et résoudre $|x - a| \leq r$.
- Maîtriser les règles des **puissances entières** et des **racines carrées**.
- Développer, factoriser, reconnaître les **trois identités remarquables**, y compris « cachées ».
- Démontrer par l'absurde qu'un nombre est **irrationnel** (cas modèle $\sqrt{2}$).
- Encadrer, contrôler la propagation d'erreur, utiliser la **notation scientifique**.

Contenu

- ➔ Prérequis — l'essentiel à savoir avant de commencer
- ➔ Activité 1 — D'où viennent les nombres réels ?
- ➔ **I. Les ensembles de nombres**
 - Définition clé 1, Propriété 1.1 (critère décimal)
 - Méthodes 1, 2, 3 (identifier la nature d'un nombre)
 - Démonstration exigible : Théorème 1 — $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
 - Exercices 8 à 16 p. 22
- ➔ **II. Intervalles, valeur absolue, distance**
 - Définition clé 2, Propriétés 2.1 et 2.2 (valeur absolue)
 - Propriété clé 2.3 (distance), Théorème 2 (caractérisation $|x - a| \leq r$)
 - Méthodes 4, 5, 6, 7, 8 (simplifier, majorer, résoudre, caractériser, étudier par cas)
 - Exercices 24 à 35 p. 28
- ➔ **III. Calcul algébrique : puissances, racines, identités remarquables**
 - Propriété clé 3.1 (puissances), Propriété clé 3.2 (racines)
 - Théorème 3 (identités remarquables)
 - Méthodes 9, 10, 11, 12, 13, 14
 - Tableaux récapitulatifs — puissances & racines
 - Exercices 42 à 58 p. 36
- ➔ **IV. Ordre, encadrement, notation scientifique**
 - Propriété 4.1 (ordre et opérations), Définition 4.2 (notation scientifique)
 - Méthodes 15, 16, 17
 - Exercices 62 à 70 p. 42
- ➔ **Bilan** — problème de synthèse sur le nombre d'or φ
- ➔ **Ouverture** — Vers la séquence 2 (Calcul littéral)

Prérequis — l'essentiel à savoir avant de commencer

Prérequis — l'essentiel à savoir avant de commencer

Avant d'aborder cette séquence, tu dois maîtriser parfaitement les notions suivantes, vues au collège :

P1. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

P2. Calcul fractionnaire. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

P3. Puissances. Pour $a \in \mathbb{R}^*$, $n, m \in \mathbb{Z}$: $a^n a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{nm}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$.

P4. Racine carrée. Si $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est l'unique réel positif tel que $(\sqrt{a})^2 = a$. On a $\sqrt{a^2} = |a|$.

P5. Identités remarquables. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

P6. Ordre. Si $a \leq b$ et $c > 0$, alors $ac \leq bc$; si $c < 0$, $ac \geq bc$ (**le sens change**).

P7. Distance sur la droite. $d(a, b) = |b - a|$.

Mini-exercice de vérification (à faire de tête, en moins de 5 minutes).

a) Calculer $A = \frac{2}{3} - \frac{5}{4} \times \frac{8}{15}$.

b) Simplifier $B = \frac{3^{-2} \times 3^5}{3^2}$.

c) Développer $C = (2x - 3)^2$.

d) Distance entre les abscisses -7 et 4 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

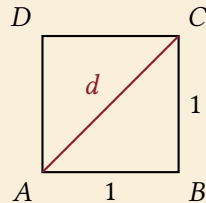
.....

Activité 1 — D'où viennent les nombres réels ?

Activité 1 — Diagonale du carré unité

Contexte historique. Les pythagoriciens (vi^e s. av. J.-C.) pensaient que tous les nombres pouvaient s'écrire comme un quotient de deux entiers. La découverte que la diagonale d'un carré de côté 1 ne pouvait pas s'écrire ainsi fut un séisme philosophique.

On considère un carré $ABCD$ de côté 1 et on note d la longueur de sa diagonale.



a. Avec le théorème de Pythagore dans le triangle ABC , exprimer d^2 , puis d .

.....

.....

.....

b. Avec la calculatrice, donner un encadrement de d d'amplitude 10^{-4} .

.....

.....

c. À la calculatrice, essayer plusieurs fractions $\frac{p}{q}$ (avec p, q entiers, $q \neq 0$) qui approchent d : par exemple $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{99}{70}$, $\frac{1393}{985}$. Aucune ne coïncide *exactement* avec $\sqrt{2}$. Que peut-on *conjecturer* sur la nature de $\sqrt{2}$?

.....

.....

.....

1 Les ensembles de nombres

Dans toute cette section, x désigne un réel.

1.1 Construction « en couches » : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

★ Définition clé – Définition 1.1 Les cinq ensembles de nombres

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: entiers naturels.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: entiers relatifs.
- $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$: décimaux (soit encore $\frac{a}{2^n \times 5^n}$, puisque $10 = 2 \times 5$).
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$: rationnels.
- $\mathbb{R}$: tous les nombres mesurant une longueur sur la droite graduée.

Les inclusions sont **strictes** :

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

🔍 Remarque

À chaque étape, on exhibe un élément du grand ensemble qui n'est pas dans le petit : $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; $0,5 \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$; $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$ ($0,3$ est infini) ; $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (théorème 1).

★ Propriété – Propriété 1.1 Critère décimal

Un réel x est :

- **décimal** ssi son écriture décimale est **finie** ;
- **rationnel** ssi son écriture décimale est **finie ou périodique** à partir d'un certain rang.

✓ Exemple

$$0,123 \in \mathbb{D}, \quad \frac{1}{7} = 0,142857 \text{ (périodique, période 6)} : \frac{1}{7} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}.$$

1.2 Reconnaître la nature d'un nombre

🔍 Méthode – 1

Identifier le plus petit ensemble (*registre algébrique*) **Énoncé**. Pour chacun des nombres ci-dessous, donner le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ auquel il appartient. Justifier rigoureusement.

$$x_1 = \frac{45}{15}, \quad x_2 = \frac{17}{8}, \quad x_3 = \frac{4}{11}, \quad x_4 = \sqrt{18} - 3\sqrt{2}, \quad x_5 = \pi - \frac{22}{7}.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Méthode — 2

Démontrer la rationalité d'un nombre périodique (*registre numérique*) **Énoncé.** Soit $x = 0,42\overline{7} = 0,4272727 \dots$. Montrer que $x \in \mathbb{Q}$ et donner sa forme $\frac{p}{q}$ irréductible.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Méthode — 3

Reconnaître une expression rationnelle cachée (*registre algébrique avancé*) **Énoncé.** Soit $a = \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$. Montrer que $a \in \mathbb{N}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

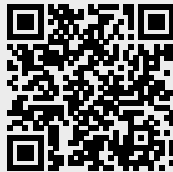
1.3 Démonstration exigible : $\sqrt{2}$ est irrationnel

★ Théorème — Théorème 1 Irrationalité de $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel : $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration – par l’absurde – démonstration au programme

Vidéo associée : la rédaction complète est disponible en vidéo Manim.



demo-01-irrationalite-racine-2

Énoncé à démontrer. *Il n'existe pas $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.*

[illegible]

➡ *Exercices 8 à 16 p. 22 (Hyperbole 2^{de} — Nathan 2024).*

2 Intervalles, valeur absolue et distance

Cadre. On travaille dans $\mathbb{R}$ muni de la droite graduée. a, b désignent des réels avec $a \leq b$, sauf mention contraire.

2.1 Intervalles de $\mathbb{R}$

★ Définition clé – Définition 2.1 Les neuf types d'intervalles

Pour $a \leq b$ réels :

Notation	Définition	Lecture	Représentation
$[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	fermé borné (segment)	
$]a; b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	ouvert borné	
$[a; b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	semi-ouvert à droite	
$]a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	semi-ouvert à gauche	
$[a; +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	demi-droite fermée	
$]a; +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	demi-droite ouverte	
$] - \infty; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	demi-droite fermée	
$] - \infty; b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	demi-droite ouverte	
$] - \infty; +\infty[= \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ tout entier	toute la droite	

🔊 Attention

∞ n'est pas un nombre : c'est une notation pour signaler que l'intervalle n'est pas borné. Le crochet est toujours ouvert du côté de $\pm\infty$.

★ Propriété – Propriété 2.1 Intersection et réunion

$I \cap J$ = ensemble des réels à la fois dans I et dans J ; $I \cup J$ = ensemble des réels dans I ou dans J . L'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle (éventuellement vide). La réunion ne l'est pas nécessairement.

✓ Exemple

$$[-2; 5] \cap [3; 10] = [3; 5] ; [-2; 5] \cup [3; 10] = [-2; 10] ; [-2; 5] \cap [7; 10] = \emptyset.$$

2.2 Valeur absolue et distance sur $\mathbb{R}$

★ Définition clé – Définition 2.2 Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$. La *valeur absolue* de x , notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Géométriquement, $|x|$ est la distance du point d'abscisse x à l'origine.

★ Propriété – Propriété 2.2 Propriétés algébriques

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: (1) $|x| \geq 0$ et $|x| = 0 \iff x = 0$; (2) $|-x| = |x|$; (3) $|xy| = |x| |y|$; (4) $\sqrt{x^2} = |x|$ (attention : ce n'est pas x si $x < 0$); (5) Inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$.

🔍 Méthode – 4

Simplifier une expression avec valeurs absolues (*algébrique*) **Énoncé.** Simplifier (sans valeur absolue) :
 (a) $A = \sqrt{(x-5)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque; (b) $B = |-3x| \times |x-1|$ pour $x \in \mathbb{R}$; (c) $C = |x^2 - 9|$ pour $x \in [-3; 3]$; (d) $D = |(x-1)(2-x)|$ pour $x \in [1; 2]$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

🔍 Méthode – 5

Majorer avec l'inégalité triangulaire (*algébrique*) **Énoncé.** Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x| \leq 2$ et $|y| \leq 3$. Majorer : (a) $|x + y|$; (b) $|2x - 3y|$; (c) $|x^2 + xy|$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

★ Propriété clé – Propriété 2.3 Distance sur $\mathbb{R}$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. La distance entre les abscisses a et b vaut :

$$d(a, b) = |b - a| = |a - b|.$$

2.3 Caractérisation $|x - a| \leq r$ ★ Théorème – Théorème 2 Boules dans $\mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. On a :

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r \iff x \in [a - r; a + r].$$

De même $|x - a| < r \iff x \in]a - r; a + r[$, et $|x - a| \geq r \iff x \in]-\infty; a - r] \cup [a + r; +\infty[$.

Interprétation. $|x - a|$ se lit « distance entre x et a » ; $|x - a| \leq r$: « x est à distance au plus r de a ».

🔧 Méthode – 6

Résoudre une inéquation avec valeur absolue (*algébrique*) **Énoncé.** Résoudre : (a) $|x - 3| \leq 5$; (b) $|2x + 1| < 7$; (c) $|3x - 4| \geq 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

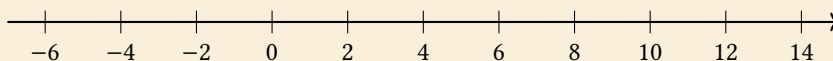
.....

.....

🔧 Méthode – 7

Caractériser un intervalle par $|x - a| \leq r$ (*graphique*) **Énoncé.** Sur la droite réelle, on considère $I = [-3; 11]$. Caractériser I par une condition $|x - a| \leq r$.

1. Représenter I sur l'axe gradué et placer son centre.



2. Déterminer a (centre) et r (demi-amplitude).

3. Écriture demandée + vérification sur les bornes.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

👉 Méthode — 8

➡ *Exercices 24 à 35 p. 28 (Hyperbole 2^{de} – Nathan 2024).*

3 Calcul algébrique : puissances, racines, identités remarquables

Cadre. a, b, x, y désignent des réels ; on précise systématiquement les conditions d'existence.

3.1 Puissances d'exposant entier relatif

★ Propriété clé – Propriété 3.1 Règles des puissances

Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$a^n a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; \quad (a^n)^m = a^{nm}; \quad (ab)^n = a^n b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a^0 = 1.$$

Conditions d'existence. $a \neq 0$ pour a^{-n} (sinon dénominateur nul).

⚠ Attention

On ne peut pas « additionner les exposants » entre puissances de bases différentes : $2^3 + 5^3$ ne se simplifie pas en une seule puissance.

3.2 Racine carrée

■ Définition 3.1 Racine carrée

Pour $a \geq 0$, la racine carrée de a , notée $\sqrt{a}$, est l'unique réel **positif ou nul** tel que $(\sqrt{a})^2 = a$.

Condition d'existence. $\sqrt{a}$ n'est définie dans $\mathbb{R}$ que pour $a \geq 0$.

★ Propriété clé – Propriété 3.2 Règles des racines

Pour $a \geq 0, b \geq 0$:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}; \quad \text{si } b > 0, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Pièges à proscrire. $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (ex. $\sqrt{9+16} = 5 \neq 7$). $\sqrt{a^2} = a$ **est faux** si $a < 0$.

⚡ Méthode — 9

Simplifier une expression avec racines (algébrique) **Énoncé.** Simplifier : $A = \sqrt{50} - 3\sqrt{8} + \sqrt{200}$;

$$B = \frac{\sqrt{45} \times \sqrt{20}}{\sqrt{8}}.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

👉 Méthode — 10

Rendre rationnel un dénominateur (*algébrique avancé*) **Énoncé.** Soit $C = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ et $D = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1}$.
Donner leur forme avec dénominateur rationnel.

[illegible]

👉 Méthode — 11

Étude graphique de la fonction racine (*graphique*) Énoncé.

1. Donner $\mathcal{D}_f$ pour $f(x) = \sqrt{x}$.
2. Compléter le tableau de valeurs (arrondies au centième).

x	0	0,25	1	2	4	6,25	9	16
$\sqrt{x}$								

3. Tracer la courbe de f sur $[0; 16]$.
4. Résoudre graphiquement $\sqrt{x} \geq 2$, puis par le calcul.

[illegible]

Méthode — 14

Identité remarquable et problème d'aire (géométrie/contextualisé) **Énoncé.** Carré $ABCD$ de côté x ($x > 3$); on découpe un carré de côté $x - 3$ dans le coin inférieur gauche.

- Exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ de la zone restante.
- Montrer $\mathcal{A}(x) = 3(2x - 3)$.
- Pour quel x a-t-on $\mathcal{A}(x) = 39 \text{ cm}^2$?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Tableau récapitulatif – Identités remarquables

Forme initiale	Forme développée	Exemple
$(a + b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
$(a - b)^2$	$a^2 - 2ab + b^2$	$(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$
$(a + b)(a - b)$	$a^2 - b^2$	$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$

Tableau récapitulatif – Puissances et racines

Règle	Conditions	Exemple
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a \neq 0$	$2^3 \cdot 2^{-5} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$
$(a^n)^m = a^{nm}$	$a \neq 0$	$(3^2)^4 = 3^8$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a \neq 0$	$5^{-2} = \frac{1}{25}$
$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$	$a, b \geqslant 0$	$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$
$\sqrt{a^2} = a $	$a \in \mathbb{R}$	$\sqrt{(-5)^2} = 5$

➡ Exercices 42 à 58 p. 36 (Hyperbole 2^{de} – Nathan 2024).

[illegible]

■ Définition 4.1 Notation scientifique

✓ Example

👉 Méthode — 17

[illegible]

M. KANTÉ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ouverture — Vers la séquence 2

Dans cette séquence, nous avons *établi* la maîtrise des objets numériques : ensembles, intervalles, valeur absolue, identités, encadrements.

Dans la **séquence 2 — Calcul littéral**, nous allons *utiliser* cet outillage : développement, factorisation, manipulations avec puissances et racines, mise en pratique avec Python. La factorisation par identité remarquable et la traduction d'inégalités par des intervalles deviennent des automatismes-clés.

Remarques personnelles

[illegible]