

Séquence 1 : Polynôme du second degré

1^{re} Spécialité — Mathématiques

Fiche de révision : Polynôme du second degré

À lire **avant** le DS • À relire 24 h avant l'épreuve

★ Objectif 1 — Reconnaître les trois formes d'un trinôme

Définition. $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Ensemble de définition : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

— **Forme développée** : $f(x) = ax^2 + bx + c$ — sert à lire $c = f(0)$.

— **Forme canonique** : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = f(\alpha)$ — sert pour les variations et le sommet.

— **Forme factorisée** (si elle existe) : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ — sert pour les racines et le signe.

Méthode pour passer en forme canonique :

1. Calculer $\alpha = -\frac{b}{2a}$, puis $\beta = f(\alpha)$.

2. Écrire $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

3. Vérifier en redéveloppant.

Exemple éclair. $f(x) = x^2 - 6x + 4$. $\alpha = 3$, $\beta = f(3) = -5$. $f(x) = (x - 3)^2 - 5$.

△ Piège : on ne peut pas mettre a en facteur dans bx si on oublie de partager : penser à factoriser *seulement* les deux premiers termes, ou tout le trinôme par a comme dans la démonstration.

★ Objectif 2 — Calculer le discriminant et résoudre $f(x) = 0$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Cas	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Forme factorisée
$\Delta > 0$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$ (racine double)	$a(x - x_0)^2$
$\Delta < 0$	aucune solution réelle	non factorisable dans $\mathbb{R}$

Méthode :

1. Mettre l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

2. Identifier a , b , c et calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.

3. Conclure selon le signe de Δ et donner les solutions.

Exemple éclair. $x^2 - 3x - 10 = 0$: $\Delta = 9 + 40 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$. $x_1 = -2$, $x_2 = 5$.

△ Piège : attention au signe de a ! Si $a < 0$, le dénominateur $2a$ est négatif et inverse l'ordre des racines.

★ Objectif 3 — Somme et produit des racines

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 (i.e. $\Delta \geq 0$) :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Application 1 : si on connaît une racine α , l'autre est $\beta = -\frac{b}{a} - \alpha$ ou $\beta = \frac{c}{a\alpha}$.

Application 2 : pour vérifier rapidement deux racines candidates, calculer leur somme et leur produit.

Exemple éclair. $x^2 + 13x + 30$, racine $\alpha = -3$: $\beta = \frac{30}{1 \cdot (-3)} = -10$.

★ Objectif 4 — Tracer la parabole, lire le sommet

Sommet : $S(\alpha, \beta)$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = f(\alpha)$.

Axe de symétrie : $x = \alpha$.

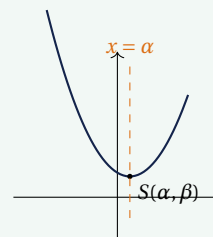
Sens :

- $a > 0$: parabole vers le **haut**, minimum.
- $a < 0$: parabole vers le **bas**, maximum.

Tableau de variations :

$a > 0$: $\searrow$ jusqu'à α puis $\nearrow$.

$a < 0$: $\nearrow$ jusqu'à α puis $\searrow$.



★ Objectif 5 — Étudier le signe et résoudre une inéquation

Règle d'or : Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a , sauf entre les racines lorsqu'elles existent.

Cas	Tableau de signe					
	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$\Delta > 0$	signe	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(-a)$	0	$\text{sgn}(a)$
$\Delta = 0$	$\text{sgn}(a)$ partout, 0 en x_0					
$\Delta < 0$	$\text{sgn}(a)$ partout sur $\mathbb{R}$					

Méthode pour une inéquation :

1. Mettre sous la forme $ax^2 + bx + c \square 0$.
2. Calculer Δ , dresser le tableau de signe.
3. Lire la solution (crochets ouverts/fermés selon $<, \leq, >, \geq$).

Exemple éclair. $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$: $\Delta = 4$, racines 1 et 3, $a = -1 < 0$. $\mathcal{S} = [1; 3]$.

△ Piège : ne pas confondre le signe du discriminant et le signe de a . Le premier dit s'il y a des racines, le second dit dans quel sens va la parabole.

★ Mémo final — les 4 réflexes

1. **Forme la plus utile selon la question :** développée $\rightarrow f(0)$, canonique $\rightarrow$ sommet/extremum, factorisée $\rightarrow$ racines/signe.
2. **Toujours commencer par Δ** pour résoudre $f(x) = 0$, factoriser, ou étudier le signe.
3. **Vérifier :** redévelopper la forme canonique ou factorisée pour s'assurer qu'on retombe bien sur la forme développée.
4. **Pour un problème concret :** identifier l'inconnue, écrire la fonction modèle, étudier le sens de variation et conclure dans le contexte (avec unités).