

Séquence 1 : Polynôme du second degré

1^{re} Spécialité — Mathématiques

Exercices niveau intermédiaire

Polynôme du second degré — 14 exercices regroupés par objectif

★ Objectif 1 — Trois formes du trinôme

Exercice 1 (calcul direct). Pour chaque fonction, indiquer si elle est polynôme du second degré ; si oui, donner a , b , c .

a. $f(x) = 4x^2 - 7x + 1$

b. $g(x) = (x+2)(x-5)$

c. $h(x) = 3x + 4$

d. $k(x) = -2x^2 + 5$

e. $\ell(x) = x^3 - x^2$

f. $m(x) = (2x-1)^2$

Exercice 2 (forme canonique). Mettre sous forme canonique :

a. $f(x) = x^2 - 4x + 1$

b. $g(x) = x^2 + 8x + 12$

c. $h(x) = 2x^2 - 12x + 7$

d. $k(x) = -x^2 + 6x - 4$

Exercice 3 (du développé au factorisé). Soit $f(x) = x^2 + x - 12$.

- Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- Calculer Δ et déterminer les racines de f .
- En déduire la forme factorisée de $f(x)$.
- Vérifier en développant.

★ Objectif 2 — Résolution d'équations

Exercice 4 (calcul direct). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $x^2 - 5x + 6 = 0$

b. $2x^2 + x - 1 = 0$

c. $x^2 - 4x + 4 = 0$

d. $x^2 + x + 1 = 0$

e. $-3x^2 + 12x - 9 = 0$

f. $4x^2 - 25 = 0$

Exercice 5 (mise en forme préalable). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $3x^2 + 5x = 2x^2 + 7$

2. $(x-1)(x+2) = 4$

3. $x^2 = 9 - 4x$

★ Objectif 3 — Somme et produit des racines

Exercice 6 (avec une racine donnée). Pour chaque trinôme, on donne une racine. Déterminer l'autre :

a. $f(x) = x^2 - 2x - 15$, racine 5.

b. $g(x) = 2x^2 + x - 3$, racine 1.

c. $h(x) = x^2 - 7x + 10$, racine 2.

d. $k(x) = 3x^2 + 5x - 2$, racine -2.

Exercice 7 (vérification). Sans calculer le discriminant, vérifier que -3 et 5 sont les racines de $f(x) = x^2 - 2x - 15$ en utilisant somme et produit.

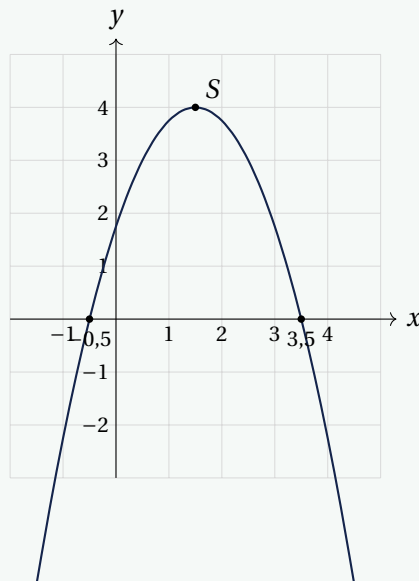
★ Objectif 4 — Variations et parabole

Exercice 8 (sommet et tableau). Pour chaque fonction :

1. Donner les coordonnées du sommet S .
2. Préciser si f admet un minimum ou un maximum, le calculer.
3. Donner le tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ b. $g(x) = -x^2 + 6x - 4$

Exercice 9 (lecture graphique). On a tracé la parabole $\mathcal{P}$ représentative d'une fonction polynôme du second degré f .



1. Donner les coordonnées du sommet S .
2. Donner les racines de f .
3. Donner la valeur de $f(0)$.
4. Dresser le tableau de signe et de variations de f .
5. Déterminer l'expression algébrique de $f(x)$ sous forme factorisée puis développée.

★ Objectif 5 — Signe et inéquations

Exercice 10 (étude de signe). Étudier le signe de chaque trinôme sur $\mathbb{R}$ et présenter le résultat dans un tableau :

a. $f(x) = x^2 - x - 6$

b. $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$

c. $h(x) = x^2 + 4x + 4$

d. $k(x) = x^2 + x + 2$

Exercice 11 (inéquations). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

b. $-x^2 + 3x + 4 > 0$

c. $2x^2 + x - 1 \leq 0$

d. $x^2 - 6x + 9 < 0$

👉 Vrai/Faux et QCM

Exercice 12 (Vrai/Faux justifié). Indiquer si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

1. Si $\Delta > 0$, alors le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$.
2. Si $a > 0$ et $\Delta < 0$, alors $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Le trinôme $f(x) = (x-3)^2 + 2$ admet une racine double.
4. La somme des racines de $x^2 - 5x + 6$ vaut -5 .

Exercice 13 (QCM — une seule bonne réponse).

1. Le discriminant de $2x^2 - 3x + 5$ est : a. -31 b. -29 c. 19 d. 49 .
2. Le sommet de la parabole $y = x^2 - 4x + 1$ est : a. $(2, -3)$ b. $(-2, 3)$ c. $(2, 1)$ d. $(4, 1)$.
3. L'équation $-x^2 + x + 6 = 0$ admet : a. 0 solution b. 1 solution c. 2 solutions de signes opposés d. 2 solutions de même signe.
4. Le trinôme $-x^2 + 2x + 3$ est strictement positif sur : a. $\mathbb{R}$ b. $] -1; 3[$ c. $] -\infty; -1[\cup] 3; +\infty[$ d. $\emptyset$.

Exercice 14 (modélisation). Un agriculteur dispose de 40 mètres de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire le long d'un mur (le côté contre le mur n'est pas grillagé). On note x la largeur perpendiculaire au mur (en mètres), avec $x \in [0; 20]$.

1. Exprimer la longueur de l'enclos en fonction de x .
2. Montrer que l'aire $\mathcal{A}(x)$ s'écrit $\mathcal{A}(x) = -2x^2 + 40x$.
3. Étudier les variations de $\mathcal{A}$ sur $[0; 20]$ et déterminer les dimensions qui maximisent l'aire. Donner cette aire maximale.

Corrigés détaillés

Exercice 1. **a.** polynôme, $a = 4, b = -7, c = 1$. **b.** $g(x) = x^2 - 3x - 10$, polynôme, $a = 1, b = -3, c = -10$. **c.** non, fonction affine. **d.** polynôme, $a = -2, b = 0, c = 5$. **e.** non, degré 3. **f.** $m(x) = 4x^2 - 4x + 1$, polynôme, $a = 4, b = -4, c = 1$.

Exercice 2. Chaque fonction est polynôme, donc définie sur $\mathbb{R}$. **a.** $\alpha = 2, \beta = -3 : f(x) = (x-2)^2 - 3$. **b.** $\alpha = -4, \beta = -4 : g(x) = (x+4)^2 - 4$. **c.** $\alpha = 3, \beta = -11 : h(x) = 2(x-3)^2 - 11$. **d.** $\alpha = 3, \beta = 5 : k(x) = -(x-3)^2 + 5$.

Exercice 3. **1.** f est polynomiale donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. **2.** $\Delta = 1 + 48 = 49 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 7$, $x_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$, $x_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$. **3.** $f(x) = (x+4)(x-3)$. **4.** $(x+4)(x-3) = x^2 + x - 12$. ✓

Exercice 4. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ pour toutes les équations. **a.** $\Delta = 1$, $x_1 = 2, x_2 = 3$. **b.** $\Delta = 9$, $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$. **c.** $\Delta = 0$, $x_0 = 2$. **d.** $\Delta = -3 < 0$, pas de solution. **e.** $\Delta = 144 - 108 = 36$, $x_1 = \frac{-12-6}{-6} = 3, x_2 = 1$. **f.** $4x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm \frac{5}{2}$.

Exercice 5. **1.** On ramène à $x^2 + 5x - 7 = 0$, $\Delta = 25 + 28 = 53$, $x = \frac{-5 \pm \sqrt{53}}{2}$. **2.** $(x-1)(x+2) = 4 \iff x^2 + x - 6 = 0$, $\Delta = 25$, $x_1 = -3, x_2 = 2$. **3.** $x^2 + 4x - 9 = 0$, $\Delta = 52$, $x = -2 \pm \sqrt{13}$.

Exercice 6. On utilise $\beta = -\frac{b}{a} - \alpha$ ou $\beta = \frac{c}{a\alpha}$. **a.** $\beta = -3$. **b.** $S = -\frac{1}{2}$, donc $\beta = -\frac{3}{2}$. **c.** $\beta = 5$. **d.** $S = -\frac{5}{3}$, donc $\beta = -\frac{5}{3} + 2 = \frac{1}{3}$.

Exercice 7. $S = -3 + 5 = 2 = -\frac{-2}{1}$ ✓ et $P = -3 \times 5 = -15 = \frac{-15}{1}$ ✓.

Exercice 8. Chaque fonction est polynomiale donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme fonction polynôme). **a.** $\alpha = 2, \beta = -3$, sommet $S(2, -3)$, minimum -3 , f décroît sur $]-\infty; 2]$ puis croît. **b.** $\alpha = 3, \beta = 5$, sommet $S(3, 5)$, maximum 5 , g croît sur $]-\infty; 3]$ puis décroît.

Exercice 9. **1.** $S(1, 5; 4)$. **2.** $-0,5$ et $3,5$. **3.** On lit $f(0) \approx 3,5$ sur la courbe. **4.** Signe : négatif à l'extérieur de $[-0,5; 3,5]$, positif entre. Variations : f croît sur $]-\infty; 1,5]$, décroît sur $[1,5; +\infty[$. **5.** S est un maximum donc $a < 0$. Avec $f(0) = a \times 0,5 \times (-3,5) = -1,75a = 3,5$, on obtient $a = -2$. Donc $f(x) = -2(x+0,5)(x-3,5) = -2x^2 + 6x + 3,5$.

Exercice 10. Chaque trinôme est défini sur $\mathbb{R}$. **a.** racines -2 et 3 , $a > 0 : f \geq 0$ sur $]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$. **b.** racines 1 et 3 , $a < 0 : g \geq 0$ sur $[1; 3]$. **c.** $\Delta = 0$, $x_0 = -2$, $a > 0 : h \geq 0$ partout, nul en -2 . **d.** $\Delta = -7 < 0$, $a > 0 : k > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. **a.** $\mathcal{S} =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$. **b.** racines -1 et 4 , $a = -1 < 0 : \mathcal{S} =]-1, 4[$. **c.** racines -1 et $\frac{1}{2}$, $a > 0 : \mathcal{S} = [-1; \frac{1}{2}]$. **d.** $(x-3)^2 < 0$ impossible : $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 12. **1. Faux** : si $\Delta > 0$, le trinôme change de signe (il a deux racines distinctes). **2. Vrai** : $\Delta < 0$ donc pas de racine ; le trinôme garde le signe de a , ici positif. **3. Faux** : $(x-3)^2 + 2 \geq 2 > 0$, pas de racine du tout. **4. Faux** : $S = -\frac{-5}{1} = 5$.

Exercice 13. **1. a** ($\Delta = 9 - 40 = -31$). **2. a.** **3. c** (racines -2 et 3). **4. b.**

Exercice 14. **1.** Longueur $= 40 - 2x$. **2.** $\mathcal{A}(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$. **3.** $\mathcal{A}$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ (a fortiori sur $[0; 20]$). $\alpha = -\frac{40}{-4} = 10$, $\mathcal{A}(10) = 200$. Maximum atteint en $x = 10$ m, longueur 20 m, aire 200 m^2 .