

Séquence 1 : Polynôme du second degré

1^{re} Spécialité — Mathématiques

Séquence 1

Polynôme du second degré

1^{re} Spécialité Mathématiques — Année 2025-2026

M. KANTE • Durée prévue : 9 h — 10 h

★ Objectif

- À la fin de la séquence tu dois être capable de :
- Réactiver les connaissances de Seconde (identités remarquables, fonction carré) ;
 - Étudier une fonction polynôme du second degré et maîtriser ses trois formes : **développée, canonique, factorisée** ;
 - Calculer le discriminant et résoudre une équation du second degré ;
 - Factoriser un trinôme et étudier le signe d’une expression du second degré ;
 - Résoudre une inéquation du second degré et l’utiliser dans un problème concret.

📖 Prérequis — l’essentiel à savoir avant de commencer

- **Identities remarquables** : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
- **Factorisation par mise en facteur** : $ax + ab = a(x + b)$.
- **Fonction carré** $x \mapsto x^2$: décroissante sur $] -\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$, courbe = parabole symétrique par rapport à l’axe des ordonnées.
- **Résolution graphique** de $f(x) = k$: abscisses des points d’intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite $y = k$.
- **Signe d’un produit** : un produit est positif ssi les facteurs sont de même signe.

Mini-exercice de vérification. Développer $(2x - 3)^2$ puis factoriser $x^2 - 25$.

.....

.....

.....

■ Table des contenus

Activité d'introduction. Étude d'un coût de production (chocolaterie).

I. Fonction polynôme du second degré

- Définition 1 — trinôme du second degré
- Propriété 1 + démonstration — forme canonique (**exigible**)
- Définition 2 — discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- Propriété 2 — variations et parabole
- Méthodes 1, 2, 3

II. Équation du second degré

- Définition 3 — équation, racine
- Théorème 1 + démonstration — résolution selon Δ (**exigible**)
- Propriété 3 + démonstration — somme et produit des racines (**exigible**)
- Méthodes 4, 5

III. Factorisation et étude de signe

- Propriété 4 — forme factorisée selon Δ
- Théorème 2 — signe d'un trinôme
- Méthodes 6, 7 — inéquations du second degré

IV. Bilan — Problème type Bac

★ Activité : Étude du coût de production d'une chocolaterie

Une chocolaterie produit différents types de chocolat. Les frais de production F , en euros, dépendent de la quantité q , en tonnes, de chocolats produits. Ils sont donnés par la relation :

$$F = q^2 - 16q + 740, \quad q \in [0; 30].$$

1. Calculer le montant des frais de production pour les quantités $q = 5$ tonnes et $q = 10$ tonnes.

.....

.....

.....

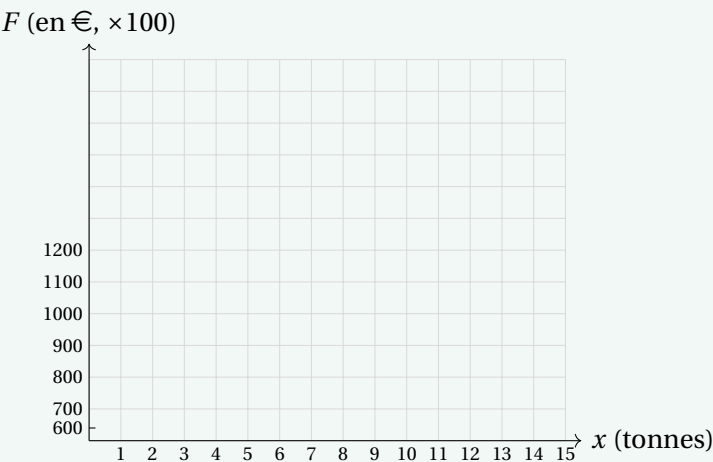
.....

.....

2. On considère la fonction f définie sur $[0; 30]$ par $f(x) = x^2 - 16x + 740$.

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous, puis tracer la courbe représentative de f sur la grille.

x	0	5	8	10	15	20	30
$f(x)$							



b) On admet que la fonction f admet un minimum $M = 676$ atteint pour $x = 8$. Établir le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 30]$.

.....

.....

.....

.....

.....

c) Déterminer graphiquement une valeur approchée de x pour laquelle $f(x) = 1000$.

.....

.....

.....

.....

3. En déduire les réponses aux questions concrètes :

— La quantité de chocolat pour laquelle les frais de production sont **minimaux** :

.....

.....

— La quantité de chocolat pour laquelle les frais s’élèvent à 1000 € :

.....

.....

*Cette activité fait apparaître une fonction de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$. C’est une **fonction polynôme du second degré** : son graphe est une parabole, elle admet un extremum, et la résolution de $f(x) = k$ se ramène à celle d’une équation du second degré. Ce sont les trois objets que nous allons étudier dans ce chapitre.*

I. Fonction polynôme du second degré

1. Définition

■ Polynôme du second degré

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est une **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme du second degré**) lorsqu'il existe trois réels a, b, c avec $a \neq 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Les réels a, b, c sont les **coefficients** du trinôme. L'écriture $f(x) = ax^2 + bx + c$ s'appelle la **forme développée**.

Ensemble de définition. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ (combinaison polynomiale, définie pour tout réel).

📖 Remarque

La condition $a \neq 0$ est essentielle : si $a = 0$, la fonction est de degré au plus 1 (affine ou constante). En revanche, b et c peuvent être nuls.

📖 Méthode 1 — Reconnaître un trinôme du second degré

Préciser pour chaque fonction si elle est polynôme du second degré, et si oui donner ses coefficients.

a. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

.....

b. $g(x) = -x^2 + 7$

.....

c. $h(x) = (x - 2)(x + 5)$

.....

d. $k(x) = 4x + 1$

.....

2. Forme canonique

★ Propriété 0.0 Forme canonique

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Il existe deux réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Cette écriture est appelée la **forme canonique** de f .

Démonstration — forme canonique (exigible)

Vidéo de démonstration 📺 <https://youtu.be/<TBD-demo-01>>

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On factorise par a les deux premiers termes :

.....

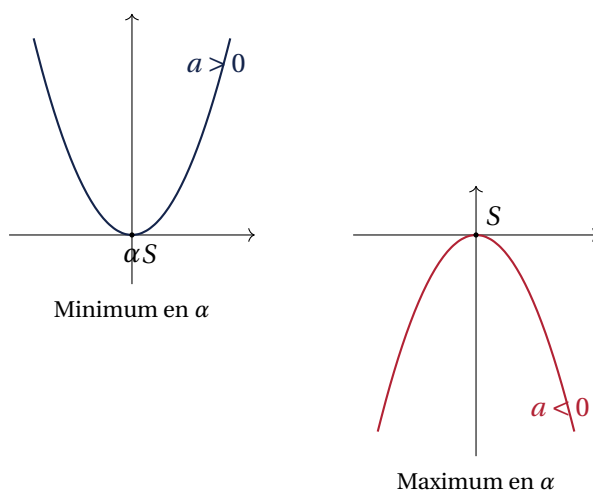
Méthode 2 — Mettre un trinôme sous forme canonique (registre algébrique)

1. $f(x) = x^2 - 6x + 4$.

2. $g(x) = 2x^2 + 6x + 4$.

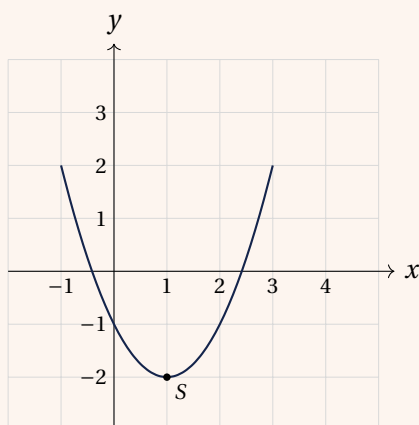
★ Propriété 0.1 Sens de variation et parabole

— Si $a < 0$: la parabole est tournée **vers le bas**; f admet un **maximum** égal à β , atteint en α .



🔍 Méthode 3 — Lire un tableau de variations depuis un graphique (registre graphique)

La courbe ci-dessous représente une fonction polynôme du second degré f . Déterminer graphiquement son sommet, son sens de variation et son signe.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Discriminant

■ Discriminant

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On appelle **discriminant** de f le réel

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

✓ Exemple

Calculer le discriminant des trinômes suivants.

a. $f(x) = x^2 - 5x + 6$.



.....

.....

b. $g(x) = 2x^2 - 4x + 2.$

.....

.....

c. $h(x) = 3x^2 + x + 5.$

.....

.....

 Remarque

On verra dans la partie II que le **signe de Δ** contrôle entièrement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

■ II. Équation du second degré

1. Définition

■ Équation du second degré, racine

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.

- Une **équation du second degré** est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
- On appelle **racine** du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ tout réel solution de l'équation $f(x) = 0$ (équivalent : tout réel ayant pour image 0).

★ Propriété 0.2 Interprétation graphique

Soit f une fonction polynôme du second degré et $\mathcal{C}_f$ sa courbe. Les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 0$ sont les **abscisses des points d'intersection** de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

2. Résolution avec le discriminant

★ Théorème : Résolution de l'équation du second degré

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré (avec $a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$: l'équation admet **deux solutions distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$: l'équation admet **une unique solution** (dite *double*) :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$: l'équation **n'admet aucune solution réelle.**

Démonstration — résolution de l'équation du second degré (exigible)

Vidéo de démonstration  <https://youtu.be/<TBD-demo-02>>

On part de la forme canonique : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Méthode 4 — Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ (registre algébrique)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2 - 3x - 10 = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Racines de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Attention

Avant d'appliquer la formule, il faut **réduire l'équation à la forme** $ax^2 + bx + c = 0$. Une équation comme $3x^2 + 5x = 2x^2 + 7$ doit d'abord devenir $x^2 + 5x - 7 = 0$ avant de calculer Δ .

3. Somme et produit des racines

★ Propriété 0.3 Somme et produit des racines

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré ($a \neq 0$) admettant deux racines x_1 et x_2 (éventuellement confondues, c'est-à-dire $\Delta \geq 0$). Alors :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Démonstration — somme et produit des racines (exigible)

On suppose $\Delta \geq 0$ et on note $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....



 Méthode 5 — Trouver la deuxième racine à partir d’une racine connue (registre numérique)

Soit $f(x) = x^2 + 13x + 30$. On sait que -3 est racine. Déterminer l’autre racine sans calculer le discriminant.

■ III. Factorisation et étude de signe

1. Forme factorisée

★ Propriété 0.4 Forme factorisée

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1, x_2 sont les racines.
- Si $\Delta = 0$: $f(x) = a(x - x_0)^2$ où $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: f ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

🔖 Méthode 6 — Factoriser un trinôme (registre algébrique)

Factoriser sur $\mathbb{R}$ le trinôme $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Signe d'un trinôme

★ Théorème : Signe d'un polynôme du second degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) et Δ son discriminant.



Cas	Signe de $f(x)$	Tableau de signe			
		x	$-\infty$	x_1	x_2
$\Delta > 0$, racines $x_1 < x_2$	signe de a à l'extérieur de $[x_1 ; x_2]$, signe de $-a$ entre	$f(x)$	signe a	signe $-a$	signe a
$\Delta = 0$, racine x_0	signe de a partout, sauf $f(x_0) = 0$	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
		$f(x)$	signe a	0	signe a
$\Delta < 0$	signe de a partout sur $\mathbb{R}$	$f(x)$ a le signe de a sur $\mathbb{R}$			

🔖 Remarque

Mémo : « Le trinôme est du signe de a , sauf entre les racines lorsqu'elles existent. »

✓ Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$. Étudier le signe de $f(x)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Inéquations du second degré

🔑 Méthode 7 — Résoudre une inéquation du second degré (registre algébrique + graphique)

Marche à suivre.

1. Mettre l'inéquation sous la forme $ax^2 + bx + c \square 0$ ($\square \in \{<, \leq, >, \geq\}$).
2. Calculer Δ et déterminer les racines (si elles existent).
3. Dresser le tableau de signe du trinôme.
4. Lire la solution dans le tableau, en respectant les bornes (crochets ouverts pour $<$ ou $>$, fermés pour $\leq$ ou $\geq$).

Application. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

★ IV. Bilan — Problème de type Bac

À retenir absolument. Pour un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, on dispose de **trois écritures équivalentes**, chacune adaptée à un usage différent :

Forme	Écriture	Utilité
Développée	$ax^2 + bx + c$	Calculer $f(x)$, $f(0) = c$
Canonique	$a(x - \alpha)^2 + \beta$	Sommet $S(\alpha, \beta)$, extremum, axe de symétrie
Factorisée	$a(x - x_1)(x - x_2)$	Racines, signe, factorisation

Le couteau suisse : $\Delta = b^2 - 4ac$. Son signe détermine *tout* : nombre de racines, possibilité de factoriser, signe du trinôme.

Problème de type Bac — Optimisation d’un rendement agricole.

Un jeune agriculteur cultive du blé sur un champ. Le rendement R , exprimé en quintaux par hectare, dépend de la quantité x d’engrais épandue (en kilogrammes par hectare, avec $0 \leq x \leq 200$) selon la relation :

$$R(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{3}{2}x + 40.$$

1. Justifier que R est bien définie et dérivable sur $[0;200]$.

.....

.....

.....

.....

2. Mettre $R(x)$ sous forme canonique.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. En déduire la quantité d’engrais qui maximise le rendement, et la valeur de ce rendement maximal.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Sans engrais, quel est le rendement de la parcelle? Est-il possible d’obtenir un rendement nul en épandant de l’engrais dans $[0;200]$?

.....

.....

5. Pour quelles quantités d'engrais le rendement dépasse-t-il 150 quintaux/ha?

Pour aller plus loin — ouverture sur la séquence suivante

La prochaine séquence portera sur les **suites numériques**. Une suite (u_n) est une fonction définie sur $\mathbb{N}$; on s'intéresse à ses variations, à son comportement quand n devient grand, et à des modèles concrets (population, intérêts composés, prêts immobiliers). Les outils travaillés ici (étude de signe, manipulation algébrique, forme canonique) y seront cruciaux, notamment pour étudier des suites du type $u_n = an^2 + bn + c$.

Démonstrations Manim associées à cette séquence :

- `manim/demo-01-forme-canonique.py` — Démonstration de la forme canonique.
- `manim/demo-02-racines-discriminant.py` — Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ selon le signe de Δ .

